TD Variables aléatoires

Évènements et indépendance

RIB **Exercice 1** Soient X, Y indépendantes, de même loi à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On pose $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=i)=p_i$.

1. Que vaut $\mathbf{P}(X \neq Y)$?
2. Montrer que $\mathbf{P}(X \neq Y) \leq \frac{n-1}{n}$.

NGQ **Exercice 2** Soit X_n une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(X_1 \geq \alpha) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(S_n \geq n\alpha) > 0$$

IVR **Exercice 3** Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. Un nombre N de personnes montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée, où N est une variable aléatoire. Chaque personne choisit un étage auquel elle descend selon une loi uniforme et de manière indépendante des autres. On note S le nombre d'arrêts que l'ascenseur va effectuer, c'est-à-dire $S = \big|\{X_1, \dots, X_N\}\big|$.

1. Justifier soigneusement que $\mathbf{P}(S=j \mid N=k) = P\big(|X_1, \dots, X_k| = j\big)$. **Ind** : *Utiliser la définition* $P(A \mid B) = \dots$
2. Établir une relation entre $\mathbf{P}(S=j \mid N=k+1)$, $\mathbf{P}(S=j \mid N=k)$ et $\mathbf{P}(S=j-1 \mid N=k)$.

V3W **Exercice 4** Soit $U_1, \dots, U_n$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$. On note $M_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n}(U_k)$.

1. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, calculer $\mathbf{P}(M_n \leq k)$. En déduire la loi de M_n.
2. On admet que pour $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\mathbf{E}(M_n)}{p} = \frac{n}{n+1}$.

UXS **Exercice 5** ★ ★ [X] Soit A (respectivement B) une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0,1\}$ (respectivement $\{-1,1\}$). On note $p_n = \mathbf{P}(A \in GL_n(\mathbb{R}))$ et $q_n = \mathbf{P}(B \in GL_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1,\ p_n = q_{n+1}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1,\ p_n \geq \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{2^i})$.

Couples de variables aléatoires

W3A **Exercice 6** Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $Z = (X,Y)$ une variable suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes, et suivent des uniformes sur $[\![1,n]\!]$ et $[\![1,m]\!]$.

AK4 **Exercice 7** Un étudiant répond à un QCM de 20 questions, chacune avec 4 réponses possibles et une seule correcte. Il répond à toutes les questions au hasard. Dans un second temps, on lui indique quelles sont ses réponses fausses, et il réessaye une des trois réponses restantes au hasard. On note X_1 et X_2 les nombres de réponses correctes au premier essai et au second essai.

1. Loi de X_1.
2. Loi de (X_1, X_2).
3. Loi de X_2.
4. Loi de $X_1 + X_2$.

AK3 **Exercice 8** Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ deux variables indépendantes.

1. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{P}(X+Y=\ell)$ comme une somme, et en donner la valeur.
2. Pour $1 \leq k \leq n+m$, exprimer la loi conditionnelle de X sachant $X+Y=k$ comme une somme. Puis en calculer la valeur.

WBL **Exercice 9** On lance deux dés. On note X, Y le min et max et des deux résultats. Déterminer la loi conjointe de (X,Y) et en déduire la loi de chacun.

S90 **Exercice 10** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi uniforme sur $\{\pm 1\}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 \dots X_k$. Montrer que les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes.

Espérance

5Y4 **Exercice 11** Soit $Y = \frac{1}{X+1}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

1. Donner une expression de $\mathbf{E}(Y)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1}\binom{n}{k}$.
3. Simplifier $\mathbf{E}(Y)$, si $p \in \left]0,1\right[$.

EFY **Exercice 12** Soient X, Y indépendantes et $Z = |X - Y|$. Calculer $\mathbf{E}(Z)$

1. si $X, Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. si $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

VSC **Exercice 13** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_1=1)=p$ et $\mathbf{P}(X_1=2)=1-p$. On considère $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_k = \min\{n \mid S_n \geq k\}$, le premier indice où la somme dépasse k.

1. Expliciter les images de S_n et Y_k.
2. À l'aide d'une FPT, sur X_1, établir une relation entre $\mathbf{P}(Y_k=m)$, $\mathbf{P}(Y_{k-1}=m-1)$ et $\mathbf{P}(Y_{k-2}=m-1)$.
3. Montrer que la suite $\mathbf{E}(Y_k)$ vérifie une équation de récurrence d'ordre 2. En déduire $\mathbf{E}(Y_k)$.

ASE **Exercice 14** ♣ Espérance conditionnelle Soit A un évènement de probabilité non nulle, et X une variable aléatoire. On définit l'espérance conditionnelle de X comme $\mathbf{E}(X \mid A) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x \mid A)$.

1. Soit $A_1, \dots, A_n$ un s.c.e. de probabilités non nulles. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X \mid A_k)\mathbf{P}(A_k)$.
2. On considère N et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. On suppose que les X_n suivent tous la même loi. Déterminer l'espérance de Y en fonction de celles de N et des X_i.

6UN **Exercice 15** Soit X une VA à valeurs dans $[\![0,k]\!]$, d'espérance $k/2$. Donner la meilleure majoration possible de $\mathbf{P}(X > k/2)$.
Indication : *Écrire* $\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{X>k/2})$.

Utilisation de fonctions indicatrices et linéarité de l'espérance

FSE **Exercice 16** On choisit une partie X de $[\![1,n]\!]$ de manière uniforme. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i l'évènement $(i \in X)$.

1. Exprimer $|X|$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_i}$, en déduire $\mathbf{E}(|X|)$.
2. ★ On note $T = \sum_{i\in X} i$. Déterminer $\mathbf{E}(T)$.

D2H **Exercice 17** Une urne contient n boules. On effectue n tirages avec remise, et chaque boule tirée est marquée. Quelle est l'espérance du nombre de boules marquées au final ? En donner un équivalent, quand $n \to +\infty$.

GZH **Exercice 18** ★ [X 2022] Soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.

1. Soit L_n la longueur du cycle de σ_n contenant 1. Déterminer l'espérance de L_n.
2. Quelle est la probabilité que 1 et 2 soient dans un même cycle de σ_n ?
3. On note c_n le nombre de cycles de σ_n. Montrer que $\mathbf{E}(c_n) \sim \ln n$.

QOX **Exercice 19** ★ [Oral X] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N\colon \omega \mapsto \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$.
2. Exprimer $\mathbf{P}(N \geq 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \geq 1)$.
3. Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

Variance

DBC **Exercice 20** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher : $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1-p$. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est l'espérance de S_n ? Sa variance ?
2. Soit $\lambda > 0$. Quelle est l'espérance de $e^{\lambda S_n}$? Sa variance ?

3T6 **Exercice 21** Soit $n \geq 2$ et $p \geq 0$ deux entiers. Un supermarché a n caisses d'ouvertes. Un nombre np de clients se présente aux caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard, de manière équiprobable et indépendamment des autres clients. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i le nombre de client à la caisse i.

1. Écrire X_i comme somme de variables indépendantes. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_i.
2. Quelle est la variance de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?
3. En déduire, pour $i \neq j$ la covariance $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ et le coefficient de corrélation ρ_{X_i,X_j}.

3T7 **Exercice 22** [Mines 2023] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$, d'espérance $\mathbf{E}(X) = m \in [a,b]$.

1. Montrer que $\mathbf{V}(X) \leq (m-a)(b-m)$.
2. Montrer que cette inégalité est optimale.

Indication : *Traduire $X \in [a,b]$ par le fait qu'une certaine variable est positive, et utiliser la positivité de l'espérance.*

O7F **Exercice 23** Soit $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

1. Déterminer l'espérance de $\det A$, puis la variance de $\det A$.
2. Montrer qu'il existe une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$, de coefficients ± 1 telle que $\det(A) > 4000$.

XIV **Exercice 24** [Mines] Une urne contient b BB et n BN. On les tire toutes, sans remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les BBs.

1. Soient $p \leq q$. Montrer que $\sum\limits_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Déterminer la loi de X, puis son espérance et sa variance.

HP1 **Exercice 25** ★ Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathcal{S}_n$, puis la variance du nombre de points fixes.

Inégalités de contrôle

O3I **Exercice 26** Inégalité de Markov exponentielle Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(e^X)}{e^\alpha}$.

TZJ **Exercice 27** ♣ Loi faible des grands nombres Soit (X_i) une suite de variables indépendantes centrées de variances σ_i^2 vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = o(n^2)$. Montrer que la suite $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers 0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \to 0$.

HAO **Exercice 28** Inégalité de Cantelli Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.

1. Montrer que $\mathbf{E}(|X|)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)$, puis que $\mathbf{E}(|X|)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(|X| > 0)$. **Ind** : *Écrire $\mathbf{P}(|X| > 0)$ comme l'espérance d'une VA.*
2. On suppose que $\mathbf{E}(Y) \geq 0$ et $\mathbf{E}(Y^2) \neq 0$, montrer que $\mathbf{P}(Y > 0) \geq \frac{\mathbf{E}(Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{V(X)+\varepsilon^2}$. En déduire que $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq 2\frac{V(X)}{V(X)+\varepsilon^2}$.

B5U **Exercice 29** Inégalité de Hoeffding Soient $X, X_1, \ldots, X_n$ des v.a. centrées indépendantes à valeurs dans $[-1,1]$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$, montrer que $e^{tx} \leq \frac{(1-x)e^{-t}}{2} + \frac{(1+x)e^t}{2}$. **Ind** : *Inégalité de convexité.*
2. Montrer que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \cosh(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. **Ind** : *Pour la seconde inégalité, écrire e^x et $\cosh x$ comme des séries.*
3. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(e^{tS}) \leq \exp\left(\frac{t^2 n}{2}\right)$. En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2n})$.

GAN **Exercice 30** ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit x uniformément dans l'intervalle $\{1,2,\ldots,n\}$ on note $\mu(x)$ le nombre de diviseurs premiers de x et on considère la variable aléatoire $|B|$ où $B = \{p \text{ premier},\ p \leq n^{1/10},\ p|x\}$. On admet que $\sum\limits_{p\leq n} \frac{1}{p} = \ln\ln n + O(1)$

1. Montrer que $\mathbf{E}(|B|), \mathbf{V}(|B|) = \ln\ln n + O(1)$.
2. Soit f une fonction tendant vers l'infini, déduire de la question précédente que

$$\left|\left\{x \in [1,n],\ |\mu(x) - \ln\ln x| > f(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\}\right| = o(n).$$